

УДК 532.59

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ ВІД ТІЛА, ЗАНУРЕНОГО В РІДИНУ

О.В. Авраменко

Досліджено тривимірну задачу про поверхневий хвильовий рух від зануреного у рідину тіла. Побудовано форму вільної поверхні, виявлено її залежність від швидкості потоку.

The 3D problem of wave propagation caused by submerged in fluid body is investigated. The form of the free surface is built; the dependence of the form from the stream velocity is obtained.

Вступ. Освоєння Світового океану у ХХІ сторіччі продовжується швидкими темпами. Виникає необхідність вивчення суті динамічних процесів, які протікають в океані, тому дослідження динаміки морського середовища посягають одне із центральних місць в океанології. Детальному вивченню поверхневих хвиль від зануреного у рідину тіла передували багаточисельні дослідження, що присвячені вивченню аналогічних усталених коливань вільної поверхні рідини, що викликані дією періодичних сил збурення на поверхні рідини [7], [8], [9], [12], [13].

Однією із цікавих і досі не повно представлених в науковій літературі є проблема фізико-математичного моделювання полів хвиль на воді, генерованих перешкодою, яка знаходиться під вільною поверхнею у однорідній оточуючій течії. Одні з перших робіт із названої проблеми з'явилися в середині ХХ сторіччя. Лінійна двовимірною задача для імпульсного руху циліндра була розглянута Хавелоком [14]. Суттєвий внесок зроблено Сретенським [8], який отримав наближені розв'язки проблеми поверхневих хвиль над зануреним під водою тілом.

Наведемо найбільш цікаві з останніх робіт по проблемі хвильових процесів, що утворюються на вільній поверхні від набігання потоку на занурене тіло. Плоска лінійна задача для циліндра, що просувається у воді кінцевої глибини, була розв'язана на основі функції Грина та метода кінцевих елементів [20]. Стаціонарна лінійна двовимірною задача та відповідне узагальнення на три виміри були розглянуті Лиу та Йу [16]. У статті Туванда та Милоха [19] розглядається ця задача для початкового етапу руху з використанням розвинення по малому часу нелінійної початково-крайової задачі. Маклаковим досліджено задачу про обтікання кулі під вільною поверхнею рідини кінцевої глибини з утворенням хвиль на вільній поверхні [4], [5], показано, що зниження рівня рідини над тілом, що рухається із сталою швидкістю, призводить до формування над ним критичного режиму та блокування течії. Ланзано [15] досліджує аналітично хвилювання у сліді, який рухається за точковим виток, що рухається горизонтально з сталою швидкістю і має сталу потужність, визначено кількість, тип та конфігурація

хвиль сліду у залежності від потужності витоку та числа Фруда. Санниковим [6] розглядається просторова задача про усталені хвилі, які утворюються при обтіканні диполя рівномірним потоком нев'язкої нестисливої вертикально стратифікованої рідини, отримані вирази для хвиль вертикальних переміщень. Відмітимо також роботи [1], [2], [3], [10], [17], [18].

Метою цієї статті є розв'язання тривимірної задачі для відносно малих швидкостей течії, отримання аналітичних виразів для потенціалу хвильового руху та форми вільної поверхні рідини при рухові довільного еліпсоїдального тіла, яке занурене у рідину нескінченної глибини, а також чисельний аналіз отриманих аналітичних виразів. Проблема розв'язується з використанням методу комплексного потенціалу подвійного шару для виведення аналітичного виразу форми відхилення поверхні у вигляді невластних інтегралів з наступним чисельним та графічним аналізом поверхневого руху від перешкоди, зануреної в оточуючу течію.

1. Постановка задачі.

Розглядається утворення поверхневих гравітаційних хвиль, які генеруються перешкодою, що занурена у півнескінченну рідину та обтікається оточуючою течією. Розв'язується тривимірна задача для відносно малих швидкостей течії, тому ефекти стисливості не є суттєвими. Припускається, що рідина нестислива, нев'язка, рух безвихоровий, течія – паралельна поверхні, а швидкість U стала.

Тривимірна задача розглядається в рідкому півпросторі $\Omega = \{(x, y, z): x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty), z \in (-\infty, \eta)\}$, з якого виключено область, де розміщено занурене жорстке тіло. Нехай $\partial\Omega$ означає поверхню зануреного тіла, а \vec{n} – зовнішня нормаль до неї. Декартова система координат, $Oxyz$ рухається з тілом у додатному напрямку Ox , вісь Oz направлено вгору. За мови симетрії форми тіла відносно площини Oxz можна перейти до двовимірної задачі, видаляючи змінну y . Позначимо через t – часову змінну, φ – потенціал швидкостей, η – відхилення вільної поверхні. Відповідна початково-крайова задача має вигляд

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - U \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad z = 0, t \geq 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = U \cos(n, x) \quad \partial\Omega, \quad t \geq 0$$

$$\varphi(x, y, z, t)|_{t=0} = f_0(x, y, z), \quad \eta(x, y, t)|_{t=0} = f_1(x, y).$$

Безрозмірні величини у термінах прискорення g та глибини зануреного тіла l вводяться таким чином (далі зірочки всюди опускаються)

$$(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{l}(x, y, z), \quad \eta^* = \frac{\eta}{l}, \quad t^* = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} t, \quad U^* = \frac{1}{(\lg)^{1/2}} U, \quad \varphi^* = \frac{1}{l(\lg)^{1/2}} \varphi.$$

2. Аналітичний розв'язок.

Щоб визначити потенціал швидкостей, який породжується рухом твердого тіла довільної форми у рідині нескінченної глибини, на поверхні тіла $\partial\Omega$ розміщується простий шар витоків змінної густини $q(x_0, y_0, z_0)$. Виходячи з результатів, отриманих Сретенським [8], потенціал швидкостей може бути представленим у вигляді поверхневого інтегралу. В рамках наближеної моделі потенціал швидкостей зводиться до потенціалу корабельних хвиль, які породжені рухом підводного тіла довільної форми

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\partial\Omega} \frac{\exp(\gamma(z+z_0))}{\sqrt{U^2\gamma-1}} \times \sin\left((x-x_0)\sqrt{\frac{\gamma}{U^2}}\right) \cos\left((y-y_0)\sqrt{\gamma^2-\frac{\gamma}{U^2}}\right) d\gamma \quad (2)$$

Поверхневий інтеграл (2) після перетворень зводиться до суми невластних інтегралів по дійсній змінній θ

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & 2U \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta) \cos\theta \exp\left(\frac{z}{U^2}\right) \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos\theta + y \sin\theta)\right] d\theta - \\ & - 2U \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\theta) \cos\theta \exp\left(\frac{z}{U^2}\right) \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos\theta + y \sin\theta)\right] d\theta \quad (3) \end{aligned}$$

Далі, припускається, що поверхня $\partial\Omega$ покрита подвійним шаром витоків з моментом μ , а вісь L подвійних витоків має напрямлюючі косинуси l, m, n . Припускається також, що поверхня $\partial\Omega$ разом із її подвійним шаром витоків рухається зі швидкістю U під вільною поверхнею. В результаті отримуються вирази для функцій $P(\theta)$ та $Q(\theta)$ у формі

$$\begin{aligned} P(\theta) = & \frac{\sec^3 \theta}{2\pi U^5} \iint_{\partial\Omega} \mu(x_0, y_0, z_0) \left[n \cos\left(\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) - \right. \\ & \left. - (l \cos\theta + m \sin\theta) \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) \times \sec^2 \theta \exp\left(\frac{z_0}{U^2} \sec^2 \theta\right) \right] \\ Q(\theta) = & \frac{\sec^3 \theta}{2\pi U^5} \iint_{\partial\Omega} \mu(x_0, y_0, z_0) \left[n \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) + \right. \\ & \left. + (l \cos\theta + m \sin\theta) \sin\left(\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right) \times \sec^2 \theta \exp\left(\frac{z_0}{U^2} \sec^2 \theta\right) \right] \end{aligned}$$

Переходячи від тіла довільної форми до еліпсоїду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c),$$

можна отримати вираз для $Q(\theta)$. Використовується той факт, що дія еліпсоїда співпадає з дією диполів, розподілених по еліптичному диску таких, що їх вісі паралельні швидкості еліпсоїда, а моменти дорівнюють $\mu(x_0, y_0, z_0) = -4\pi\rho(x_0, y_0, z_0)$. У розглянутому випадку $l = -1$, $m = 0$, $n = 0$, тому

$$P(\theta) = \frac{\sec^4 \theta}{2\pi U^5} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \iint_{\partial\Omega} \mu(\xi, \eta) \sin\left(\frac{\xi}{U^2}\right) \exp\left(\frac{\eta}{U^2} \sec^2 \theta\right) d\xi d\eta,$$

$$Q(\theta) = -\frac{\sec^4 \theta}{2\pi U^5} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \iint_{\partial\Omega} \mu(\xi, \eta) \cos\left(\frac{\xi}{U^2}\right) \exp\left(\frac{\eta}{U^2} \sec^2 \theta\right) d\xi d\eta.$$

Визначимо функції $P(\theta)$ та $Q(\theta)$:

$$P(\theta) = 0,$$

$$Q(\theta) = \frac{2\sqrt{2\pi}abc}{U(a^2 - c^2)^{3/4}} \frac{\sec^{5/2} \theta}{2 - \alpha_0} \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \times \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \quad (4)$$

Враховуючи формулу (3) для потенціалу $\phi(x, y, z)$ розглянутого хвильового руху, а також скориставшись відомою формулою для відхилення вільної поверхні $\eta = U \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{z=0}$ отримаємо такий вираз

$$\eta(x, y) = \frac{2}{U} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta) \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta +$$

$$+ \frac{2}{U} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\theta) \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta \quad (5)$$

Після підстановки формул (4) для $P(\theta)$ та $Q(\theta)$ у формули (3) та (5) отримано (тут $p^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$)

$$\phi(x, y, z) = -\frac{4\sqrt{2\pi}abc}{(a^2 - c^2)^{3/4} (2 - \alpha_0)} \times \quad (6)$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^{3/2} \theta \exp\left(\frac{z-h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \times$$

$$\times \cos\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta$$

$$\eta(x, y) = \frac{4\sqrt{2\pi}abc}{U^2 (a^2 - c^2)^{3/4} (2 - \alpha_0)} \times \quad (7)$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sec^{5/2} \theta \exp\left(-\frac{h}{U^2} \sec^2 \theta\right) \frac{J_{3/2}\left(\frac{1}{U^2} \sqrt{a^2 - c^2} \sec \theta \sqrt{1 - p^2 \sec^2 \theta}\right)}{(1 - p^2 \sec^2 \theta)^{3/4}} \times \\ \times \sin\left[\frac{1}{U^2} \sec^2 \theta (x \cos \theta + y \sin \theta)\right] d\theta.$$

3. Дослідження різних режимів руху.

Було проведено чисельний аналіз різних режимів руху з використанням формул (6) та (7). Досліджувались режими руху (PP), за умови $0,4 < Fr < 0,9$. Результати порівнювались з експериментальними [11], виявлена розбіжність складає біля 5%, що пояснюється припущеннями моделі та наближенням інтегруванням. Зауважимо, отримані результати значно краще наближують експериментальні, у порівнянні з розрахунками на основі асимптотичних наближень.

На рис.1 представлено вільну поверхню в півплощині з одного боку від осі Ox , пронормовану по найбільшому відхиленню у досліджуваній області, для двох характерних випадків генерації поверхневих хвиль тілом еліпсоїдальної форми, зануреним у рідину, на яке набігає рідкий потік. Безрозмірні геометричні параметри задано таким чином: довжини півосей еліпсоїда обертання $a=2$, $b=0,2$, $c=0,2$; глибина занурення центра еліпсоїда $(h/L) = h^* = 1$. Область, де знаходили значення відхилення вільної поверхні: $0 \leq x/U^2 \leq 200$, $0 \leq y/U^2 \leq 20$.

Результати аналізу проведених розрахунків показують на наявність множини різних PP, які суттєво відрізняються один від одного. Можна з усієї множини виділити два найбільш характерних режими PP1 та PP2. Для чисел Фруда в діапазонах $0,45 < Fr < 0,49$, $0,53 < Fr < 0,61$, $0,74 < Fr < 0,90$ (PP1) більшість збурень сконцентровані в одній області – безпосередньо в околі осі Ox , вздовж якої рухається тіло, а збурена поверхня має клиновидну (трикутну) форму, як це можна побачити на рис.1 (а) при $Fr=0.54$.

Режими руху PP2, при яких число Фруда близьке до $Fr=0,51$ або $Fr=0,68$ рис.1 (б) дають таку форму вільної поверхні, що збурення в околі осі Ox швидко затухають; в той же час усі основні збурення зосереджені на променях, які виходять від початку координат і направлених під кутом від осі Ox .

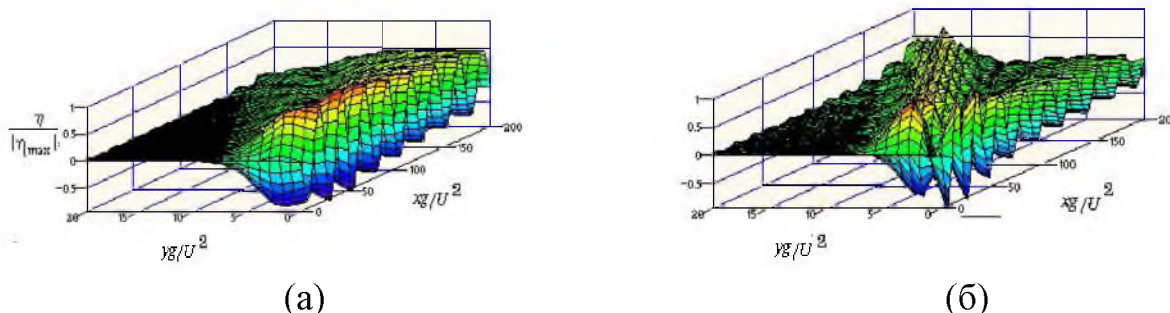


Рис.1 Відхилення вільної поверхні при (а) $Fr=0.54$; (б) $Fr=0,68$

4. Максимальні відхилення поверхні.

Досліджено залежності висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}(Fr)$ і відхилення у найглибшій подошві $\eta_{\min}(Fr)$ від числа Фруда, графіки названих залежностей представлені на рис.2 суцільними кривими.

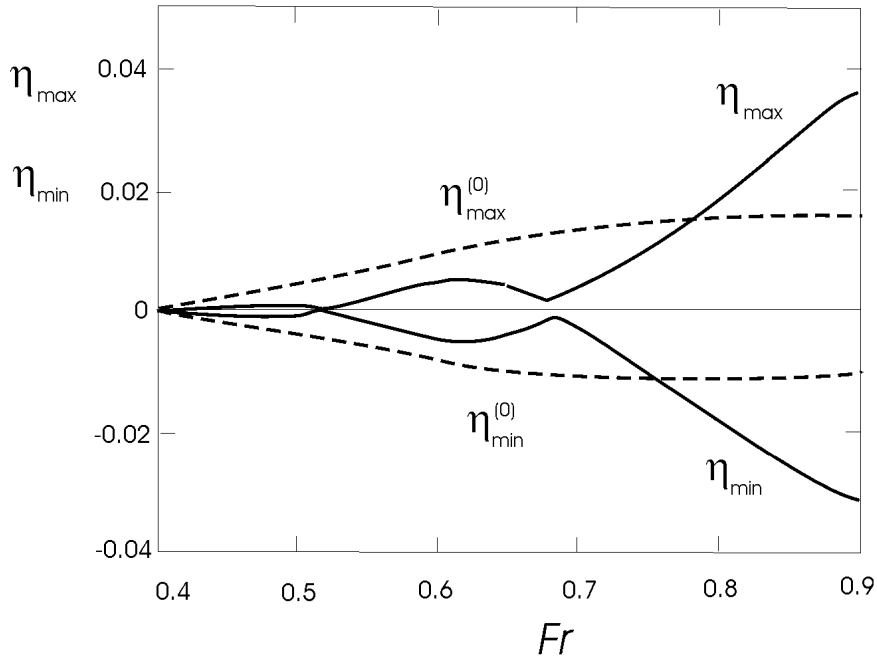


Рис.2 Залежність від числа Фруда висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}(Fr)$ (для еліпсоїда) $\eta_{\max}^{(0)}(Fr)$ (для кулі) та глибини найглибшої подошви $\eta_{\min}(Fr)$ (для еліпсоїда) $\eta_{\min}^{(0)}(Fr)$ (для кулі).

Цікаво, що найменші абсолютні відхилення спостерігаються при числах, близьких до $Fr=0,51$ або до $Fr=0,68$, тобто в РР2, а найбільші в РР1. Таким чином, картина розподілу енергії в РР1 і в РР2 має принципові відмінності. Можна зробити висновок, що хвильова енергія в РР1 концентрується навколо осі Ox , а в РР2 вона розподіляється у широкій області, що розміщена за зануреним у рідину тілом.

Для порівняння з результатами дослідження форми вільної поверхні від форми зануреного тіла було аналогічно досліджено форму вільної поверхні при генерації поверхневих хвиль тілом кулеподібної форми, підбраної так, щоб куля була рівною за об'ємом до еліпсоїда. Для куль різних радіусів і для всіх розглядуваних швидкісних режимів спостерігався досить рівномірний розподіл енергії. У випадку руху кулі залежність від числа Фруда висоти найвищого гребеня $\eta_{\max}^{(0)}(Fr)$ та глибини найглибшої подошви $\eta_{\min}^{(0)}(Fr)$ є монотонними функціями, графіки яких представлені пунктирними кривими на рис.2. Можна зробити висновок про істотну залежність форми вільної поверхні рідини не тільки від швидкості набігаючого потоку, а і від форми тіла, що рухається.

Висновки. Підтверджено експериментальні та деякі теоретичні результати щодо відповідності швидкісного режиму поверхневій картині. Виявлено існування різних швидкісних режимів руху, серед яких виділено два основних: режим руху (PP1), при якому більшість збурень зосереджено вздовж осі руху потоку, та режим руху (PP2), при якому основні збурення зосереджено вздовж променів, що виходять з початку координат і направлені під кутом до осі руху потоку.

Отримано залежність абсолютної величини максимального відхилення вільної поверхні від числа Фруда, з якої видно, що при PP1 максимальне відхилення вільної поверхні значно більше, при PP2. Хвильова енергія при PP1 концентрується вздовж осі, а при PP2 розподіляється в широкій області за зануреним в рідину тілом.

Представлені результати можуть бути застосовані при вивченні гідродинамічних процесів, що виникають внаслідок руху під водою тіл складної форми.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М. Пространственная задача обтекания источника потоком многослойной жидкости конечной и бесконечной глубины // Изв. РАН. Физ. атмосф. и океана.– 1993.– 29, №6.– С.771–779.
2. Гильман О.А., Миндлин И.М. Нелинейные волны в тяжелой слоистой жидкости, возбуждаемые твердым телом, движущимся под углом к горизонту // Нижегород. гос. техн. ун-т.– Н.Новгород, 1995.– 64 с. Деп. в ВИНТИ 26.12.95. N 3476–В95.
3. Лотфуллин М.В., Филиппов С.И. Расчет поверхностных и внутренних волн при поступательном движении профиля в весомай жидкости // Моделирование в механике.– 1991.– 5, N4.– С.76–82.
4. Маклаков Д.В. Существование решения задачи о докритическом обтекании шара // Некотор. прил. функц. анал. к задачам мат. физ. /АН СССР. СО. Ин-т мат.– Новосибирск.– 1990.– С.92–105.
5. Маклаков Д.В. Обтекание препятствия с образованием волн на свободной поверхности. Предельные режимы // Изв. РАН. Мех. жидкости и газа.– 1995.– N 2.– С.108–117.
6. Санников В.Ф. Точные решения линейной задачи об установившихся волнах, создаваемых диполем в потоке стратифицированной жидкости // Прикл. мат. и мех.– 1990.– 54, №6.– С.972–977.
7. Селезов И.Т. Распространение и трансформация поверхностных гравитационных волн в жидкости конечной глубины // Итоги науки и техн. Сер.мех. жидкости и газа / ВИНТИ.– 1990.– 24.– С.2–76.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815с.
9. Стокер Д.Д. Волны на воде.– М.: ИЛ.– 1959
10. Тверской М.Б. Об обтекании точечных препятствий потоком стратифицированной жидкости // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.– 1992.– 32, №11.– С.1825–1829.
11. Ткалич Е.Ф., Шайбо Н.В. О волнообразовании погруженного эллипсоида // Гидромеханика.– 1968.– С.39–44.
12. Черкесов Л.В. Установившиеся волны.– К.: Наук. думка, 1970.–196с.
13. Birkhoff G. Hydrodynamics.– Princeton, New Jersey: Prinston University Press, 1960.– 184 p.

14. Havelock T.H. The wave resistance of submerged cylinder in acceleration motion // Quarterly J. Mech. and Appl. Math.– 1949.– 2.– P.325–334.
15. Lanzano P. Waves generated by a moving point-source within a finite-depth ocean // Earth, Moon and Planets.– 1991.– 52, N3.– P.223–252.
16. Liu Y., Yue D.K.P. On the solution near the critical frequency for an oscillating and translating body in or near a free surface // J.Fluid Mech.– 1993.– 254.– P.251–266.
17. Lui H., Ikehata M. Computation of free surface waves around an arbitrary body by a Navier – Stokes solver using the psuedocompressibility technique // Int. J. Number. Mech. Fluids.– 1994.– 19, N5.– P.395–413.
18. Niciforovich E.I. A new approach to the study of organized vortical motion effected to body forces // AGARD Workshop "High speed body motion in water".– Kyiv, 1–3 Sept., 1997, AGARD.– R–827, 1997.– P.12.
19. Tyvand P.A., Miloh T. Free-surface flow due to impulsive motion of a submerged circular cylinder // J.Fluid Mech.– 1995.– 286.– P.67–101.
20. Wu G.X. Radiation and diffraction of water waves by a submerged circular cylinder at forward speed // J.Hydr.– 1993.– 5, №4.– P.85–96.

*Кіровоградський державний педагогічний
університет ім. В.Винниченка*

Надійшло 4 жовтня 2004р.